Méthode de Newton — Rouvière, p. 152

Théorème : Soit $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(c)<0<f(d)$ et $\forall x\in[c,d],\ f'(x)>0$.
Soit $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=:F(x_n)$.

1) Il existe un unique $a\in]c,d[$ tel que $f(a)=0$ et il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x_0\in[a-\alpha,a+\alpha]$, $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers a.

2) Si de plus, $\forall x\in[c,d],\ f''(x)>0$, alors 1) est vrai pour $I=[a,d]$ et
$$x_{n+1}-a\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2.$$

1) Puisque f est continue sur $[c,d]$ et $f(c)<0<f(d)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a\in]c,d[$ tel que $f(a)=0$. Par stricte croissance de f, a est unique.

On souhaite étudier $|F(x_n)-a|$.

Soit $x\in[c,d]$. On a : $F(x)-a=x-a-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)+\overbrace{f(a)}^{=0}}{f'(x)}$

Par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $z\in\underbrace{]a,x[}_{\text{ou }]x,a[\text{ si }x<a}$ tel que :
$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{1}{2}f''(z)(a-x)^2$$

D'où $F(x)-a=\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(x)}(a-x)^2$. Prenons $C=\dfrac{1}{2}\dfrac{\max_{z\in[c,d]}|f''(z)|}{\underbrace{\min_{z\in[c,d]}|f'(z)|}_{\neq 0}}>0$.

$\neq 0$ car f' continue >0 sur $[c,d]$ compact donc atteint son min en $x_0\in[c,d]$ et $f'(x_0)>0$

Alors $\forall x\in[c,d],\ |F(x)-a|\le C|x-a|^2$.

Soit $\alpha>0$ tel que $C\alpha<1$ et $I=[a-\alpha,a+\alpha]\subset[c,d]$.

Ainsi, $\forall x\in I$, $|F(x)-a|\le C\alpha^2<\alpha$ i.e. $F(x)\in I$ i.e. $\underline{I\text{ est stable par }F}$. → donc $\forall x_0\in I$, $(x_n)_n$ est bien définie

Ainsi, $\forall x_0\in I$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_{n+1}-a|=|F(x_n)-a|\le C|x_n-a|^2\le C\cdot C^2|x_{n-1}-a|^4\le\dots\le C\cdot C^{2^n}\underbrace{|x_0-a|}_{\le\alpha}{}^{2^{n+1}}\le(C\alpha)^{2^{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ car $0<C\alpha<1$

2) Soit $x\in[a,d]$. Puisque $f(x)\ge0$ et $f'(x)>0$, $F(x)=x-\underbrace{\dfrac{f(x)}{f'(x)}}_{\ge0}\le x$ $(*)$ d'où $F(x)-d\le x-d\le 0$

D'après 1), $F(x)-a=\dfrac{1}{2}\underbrace{\dfrac{f''(z)}{f'(x)}}_{\ge0}(a-x)^2\ge0$ d'où $F(x)\ge a$ avec inégalité stricte pour $x>a$.

Donc $I=[a,d]$ est stable par F.

Pour $x_0=a$, la suite $(x_n)_n$ est constante égale à a. Sinon, $\forall x_0\in]a,d]$, par $(*)$, $(x_n)_n$ est décroissante et $x_n\in]a,d]$, $\forall n$. Par le théorème de la limite monotone, $(x_n)_n$ converge vers l, et par continuité de F, $F(l)=l$ i.e. $f(l)=0$ d'où $l=a$ par unicité.

On a toujours : $0\le x_{n+1}-a\le C(x_n-a)^2$, $\forall x_0\in I$ d'où la convergence quadratique.

Et pour tout $x_0\in]a,d]$, $x_n\in]a,d]$ et $\dfrac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2}=\dfrac{F(x_n)-a}{(x_{n+1}-a)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$ où $z_n\in]a,x_n[$

Puisque $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$, $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ d'où, par continuité de f' et f'', $\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{f'(a)}$.

D'où, $x_{n+1}-a\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$.